HERTENTAMEN AUTOMATA THEORY
Woensdag 1 februari 2023, 09.00 - 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit acht opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen. Wanneer er bij een vraag om uitleg, motivatie of toelichting gevraagd wordt, is het belangrijk om die ook te geven.
Als we het in dit tentamen over een eindige automaat hebben (zonder verdere toevoeging), bedoelen we een deterministische eindige automaat zonder Λ-transities (wat elders *DFA* genoemd wordt).

---

1. [6 pt] Laat

$$L = \{x \in \{a, b\}^* \quad | \quad x \text{ bevat (minstens) een substring } abaabb\}$$

Teken een eindige automaat M, zó dat $L(M) = L$.

---

2. [11 pt] Formeel is een eindige automaat een vijftal $(Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$, waarbij δ de transitiefunctie is.

De uitgebreide transitiefunctie (*extended transition function*) $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ is gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \delta^*(q, \Lambda) &= q & &\text{voor elke } q \in Q \\ \delta^*(q, y\sigma) &= \delta(\ \delta^*(q, y), \sigma\ ) & &\text{voor elke } q \in Q,\ y \in \Sigma^*,\ \sigma \in \Sigma \end{aligned}$$

Toon aan, met behulp van inductie naar de lengte van z, dat

$$\delta^*(q, yz) = \delta^*(\ \delta^*(q, y), z\ ) \qquad \text{voor elke } q \in Q,\ y, z \in \Sigma^*$$

(ofwel: als we de string yz willen aflopen vanaf toestand q, kunnen we eerst string y aflopen, en vervolgens string z aflopen).

---

3. [16 pt]

(a) Laat $L \subseteq \Sigma^*$ een taal zijn, en laat $x \in \Sigma^*$ een string zijn.
Hoe is de verzameling L/x (de 'toekomstverzameling' van x met betrekking tot L) gedefinieerd? Dat wil zeggen: welke strings zitten er in L/x?
Als je het antwoord op dit onderdeel niet weet, dan kun je het 'kopen' van de docent. Wellicht kun je dan wel onderdelen (b) en (c) maken.

Laat nu $L_1 = \{(ab)^i(bc)^j \quad | \quad i \geq j\}$.

(b) Geef of beschrijf voor elk van de volgende strings x de elementen van (de toekomstverzameling) L_1/x:
   i. $x = (ab)^4(bc)^4$
   ii. $x = (ab)^4(bc)^2$
   iii. $x = (ab)^4$

(c) Geef of beschrijf de elementen van (de equivalentieklasse) $[(ab)^4(bc)^2]$, ofwel alle elementen van $\{a, b, c\}^*$ die niet *distinguishable* zijn van $(ab)^4(bc)^2$ ten opzichte van L_1.

---

4. [11 pt] Bij een eerder tentamen was er een opgave over reguliere talen over het alfabet $\{a,b,c\}$. Laat $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 1\}$. Een reguliere expressie voor L is bijvoorbeeld $aa^*bb^*cc^*$. Er werd bij het eerdere tentamen ook gevraagd om een reguliere expressie voor L' (het complement van L).

   Beschouw de volgende drie reguliere expressies r_1, r_2, r_3:

   (a) $r_1 = (a+b)^* + (b+c)^* + (a+b+c)^*(ac+ca+ba+cb)(a+b+c)^*$
   (b) $r_2 = (a+b)^* + (a+c)^* + (b+a^*c)(a+b+c)^*$
   (c) $r_3 = a^*c^*b^* + b^*a^*c^* + b^*c^*a^* + c^*a^*b^* + c^*b^*a^*$

   Laat $L(r_i)$ de taal zijn die beschreven wordt door expressie r_i. Voor elk van deze drie expressies r_i geldt dat $L(r_i) \subseteq L'$. Beantwoord nu voor elk van deze drie expressies r_i de volgende vraag:

   Is $L' \subseteq L(r_i)$?
   Zo nee, geef een string x die wel in L' zit, maar niet in $L(r_i)$.
   Zo ja, dan hoef je dat niet toe te lichten.

   Inderdaad, als het antwoord 'ja' is, is r_i een correcte reguliere expressie voor taal L'.

---

5. [10 pt]

   (a) Geef een context-vrije grammatica G_1, zó dat

   $$L(G_1) = AEqB = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) = n_b(x)\}$$

   (b) Geef een context-vrije grammatica G_2, zó dat

   $$L(G_2) = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) = n_b(x) + 1\}$$

---

6. [14 pt]

   (a) Wanneer zeggen we dat een context-vrije grammatica $G = (V, \Sigma, S, P)$ in *Chomsky normaalvorm* is?

   Als je dit antwoord niet weet, kun je het 'kopen' van de docent, zodat je het volgende onderdeel wellicht wel kunt maken.

   (b) Beschouw nu de context-vrije grammatica G_1 met terminaalalfabet $\{a,b\}$, startvariabele S en producties

   $$S \to Sa \mid bb \mid AB \qquad A \to aAbS \mid BBa \mid Ba \mid a \qquad B \to SB \mid a$$

   G_1 bevat geen Λ-producties en geen unitproducties.

   Construeer een context-vrije grammatica G_2 in Chomsky normaalvorm, zó dat $L(G_2) = L(G_1) - \{\Lambda\}$. Leg duidelijk uit hoe je aan je antwoord komt, en geef ook tussenresultaten.

---

7. [18 pt] Laat

$$\begin{aligned} L_1 &= \{x \in \{a,b,c\}^* \mid n_a(x) \neq n_c(x)\} \\ L_2 &= \{x \in \{a,b,c\}^* \mid n_a(x) + n_c(x) > n_b(x) + 1\} \end{aligned}$$

   Teken een stapelautomaat M, zó dat $L(M) = L_1 \cup L_2$. [1] Je verspeelt geen punten als M niet-deterministisch is en/of Λ-transities bevat.

   Hint: teken eerst aparte stapelautomaten voor L_1 en L_2 en combineer die.

   Leg ook uit hoe M zijn toestanden en stapel gebruikt om precies de juiste taal te accepteren.

---

8. [14 pt] Laat G de context-vrije grammatica zijn met startvariabele S en de volgende producties:

$$S \to aSb \mid bbT \qquad T \to Tc \mid \Lambda$$

   (a) Teken de niet-deterministische bottom-up stapelautomaat $NB(G)$. Vergeet daarbij niet om ook de hulptoestanden (nodig voor reducties naar producties $A \to \alpha$ met $|\alpha| \geq 2$) met hun transities te tekenen.

   (b) Voer een succesvolle berekening uit in $NB(G)$ voor de invoer $x = abbcb$, d.w.z.: een berekening die resulteert in acceptatie van x.

   Geef deze berekening weer met een tabel van de volgende vorm:

toestand q	omgekeerde stapelinhoud	resterende invoer	actie
q_0	Z_0	$abbcb$	...
...	...	...	...

   Hierin stelt (zoals gebruikelijk) q_0 de starttoestand en Z_0 het initiële stapelsymbool van $NB(G)$ voor.

   Je mag in de tabel een reductie in één stap uitvoeren, ook als er feitelijk meerdere transities van $NB(G)$ worden gevolgd.

`einde tentamen`

[1] Inderdaad, de taal $L_1 \cup L_2$ is het complement van de taal $\{x \in \{a,b,c\}^* \mid n_a(x) = n_c(x) \text{ en } n_a(x) + n_c(x) \leq n_b(x) + 1\}$ die we uit een eerder tentamen kennen.