Logica voor Informatici – najaar 2000
Opgaven en Oplossingen – Hoofdstuk 6

6.6 Wat zeggen de volgende formules over getallen?

i $\forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \land z < y))$

ii $\forall x \exists y(y \cdot y = x)$

Geef voor elke formule een verzameling getallen waarvoor de formule wel opgaat en één waarvoor de formule niet opgaat.

oplossing:

i. Voor elk tweetal verschillende getallen is er een derde getal – verschillend van de eerste twee – dat tussen de twee getallen ligt. Voorbeelden waar deze uitspraak geldt:
   - het stelsel der rationale getallen
   - de reëele getallen
   - de rationale getallen tussen 0 en 1.

   Situaties waarin de uitspraak niet geldt:
   - de natuurlijke getallen
   - de gehele getallen

ii. Elk getal heeft een wortel (of anders gezegd: elk getal is een kwadraat). Situaties waar deze uitspraak geldig is:
   - de positieve reëele getallen
   - de reëele getallen tussen 0 en 1
   - de complexe getallen
   - $\{1\}$

   Voorbeelden waar de uitspraak niet waar is:
   - de reëele getallen
   - de rationale getallen
   - de natuurlijke getallen

6.7 Beschouw het domein der *mensen* met daartussen *familierelaties*.
Definieer de volgende predikaten:
$Oxy \Leftrightarrow$ x is een ouder van y
$Vx \Leftrightarrow$ x is een vrouw

a Schrijf met behulp van O en V als formules:

  i Niemand is vader van iedereen
  oplossing: x is vader van iedereen komt overeen met $(\forall y Oxy \land \neg Vx)$,
  iemand is vader van iedereen komt overeen met $\exists x(\forall y Oxy \land \neg Vx)$,
  dus het(een) antwoord is: $\neg\exists x(\forall y Oxy \land \neg Vx)$

  ii Iedereen heeft een moeder
  oplossing: x heeft een moeder komt overeen met $\exists y(Oyx \land Vy)$.
  Het(een) antwoord is: $\forall x \exists y(Oyx \land Vy)$

  iii Wie een dochter heeft, heeft een zoon
  oplossing: $\forall x(\exists y(Oxy \land Vy) \to \exists z(Oxz \land \neg Vz))$

b Definiëer met behulp van O en V de volgende predikaten:

  i *grootouder* Gxy: x is grootouder van y. **oplossing:** $\exists z(Oxz \land Ozy)$

ii *zuster* Zxy: x is zuster van y.
oplossing: $\exists z(Ozx \wedge Ozy) \wedge Vx \wedge x \neq y$. Dit is nog niet correct; het betekent: x is een zuster of *halfzuster* van y. Helemaal correct is, bijv.,
$\exists z(Ozx \wedge Ozy \wedge Vz) \wedge \exists z(Ozx \wedge Ozy \wedge \neg Vz) \wedge Vx \wedge x \neq y$

iii *oom* Uxy: x is een oom (uncle) van y.
oplossing: $\exists z(Ozy \wedge Bxz)$, waarbij Bxz de formule is die uitdrukt dat x een broer van z is (en die formule is uiteraard analoog aan die voor zuster). Door "invullen" krijgen we dus:
$\exists z(Ozy \wedge \exists u(Oux \wedge Ouz \wedge Vu) \wedge \exists u(Oux \wedge Ouz \wedge \neg Vu) \wedge \neg Vx \wedge x \neq z)$

6.8 a Geef weer met predikaatlogische formules:

i Er zijn minstens twee objecten
oplossing: $\exists x \exists y(x \neq y)$

ii Er zijn precies 2 objecten
oplossing: $\exists x \exists y(x \neq y \wedge \neg \exists u(u \neq x \wedge u \neq y))$ of:
$\exists x \exists y(x \neq y \wedge \forall u(u = x \vee u = y))$

iii Precies twee objecten zijn A
oplossing: $\exists x \exists y(x \neq y \wedge Ax \wedge Ay \wedge \neg \exists t(At \wedge t \neq x \wedge t \neq y))$ of:
$\exists x \exists y(x \neq y \wedge Ax \wedge Ay \wedge \forall t(At \rightarrow (t = x \vee t = y)))$

iv Precies twee A's zijn B's
oplossing: $\exists x \exists y(x \neq y \wedge Ax \wedge Ay \wedge Bx \wedge By \wedge \forall t((At \wedge Bt) \rightarrow (t = x \vee t = y)))$

b De kwantor $\exists!$ wordt als volgt gedefinieerd:
$\exists! x\varphi := \exists x \forall y([y/x]\varphi \leftrightarrow y = x)$.
N.B.: *er is hier een proviso (!): y is vrij voor de variabele x in formule φ.*

i Wat betekent dit?
oplossing: Dit betekent dat er precies één object is waarvoor de formule φ geldt.

ii Laat met een plaatje zien dat $\exists! x \exists! y\, Rxy$ en $\exists! y \exists! x\, Rxy$ niet altijd equivalent zijn.
oplossing: Neem vier verschillende objecten a, b, c en d waarvoor geldt dat *Rab*, *Rbc* en *Rbd*. De formule $\exists! y\, Rxy$ is alleen waar voor $x = a$, en dus is de formule $\exists! x \exists! y\, Rxy$ waar. De formule $\exists! x\, Rxy$ is waar voor $y = b, c, d$ en dus is de formule $\exists! y \exists! x\, Rxy$ niet waar. Merk op dat als je "de pijlen omdraait" (d.w.z. als geldt dat *Rba*, *Rcb* en *Rdb*), dan de eerste formule onwaar is en de tweede waar.

iii Geef een formule die uitdrukt dat er precies één paar objecten x, y is waarvoor Rxy geldt.
oplossing: De twee formules in (ii) drukken dat *niet* uit, want in de twee voorbeelden in (ii) is dat niet waar. Een formule die het wél uitdrukt is:
$\exists x \exists y(Rxy \wedge \forall t \forall u(Rtu \rightarrow (t = x \wedge u = y)))$ of, analoog aan de formule voor $\exists! x\varphi$,
$\exists x \exists y \forall t \forall u(Rtu \leftrightarrow (t = x \wedge u = y))$. Merk op dat dit niet hoeft te betekenen dat x en y verschillend zijn.