Logica voor Informatici – najaar 2000

Opgaven en Oplossingen – Hoofdstuk 4

4.1 Bewijs met natuurlijke deductie:

1. $p \to (q \to r) \vdash q \to (p \to r)$
2. $(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$
3. $p \to q, p \to r \vdash p \to (q \wedge r)$, en de twee beweringen die uit de omkering voortkomen
4. $p \vee r, q \to r \vdash (p \to q) \to r$

oplossing:

1. De aanname $p \to (q \to r)$ korten we af als φ.

1.	$p \to (q \to r)$	`uit` φ	aanname φ
2.	q	`uit` q	aanname
3.	p	`uit` p	aanname
4.	$q \to r$	`uit` φ, p	$\to E(3, 1)$
5.	r	`uit` φ, q, p	$\to E(2, 4)$
6.	$p \to r$	`uit` φ, q	$\to I(5)$
7.	$q \to (p \to r)$	`uit` φ	$\to I(6)$

2. De aanname $(p \wedge q) \to r$ korten we af als φ.

1.	$(p \wedge q) \to r$	`uit` φ	aanname φ
2.	p	`uit` p	aanname
3.	q	`uit` q	aanname
4.	$p \wedge q$	`uit` p, q	$\wedge I(2, 3)$
5.	r	`uit` φ, p, q	$\to E(4, 1)$
6.	$q \to r$	`uit` φ, p	$\to I(5)$
7.	$p \to (q \to r)$	`uit` φ	$\to I(6)$

3. De aanname $p \wedge q$ korten we af als φ en de aanname $p \to r$ korten we af als ψ.

1.	$p \to q$	`uit` φ	aanname φ
2.	$p \to r$	`uit` ψ	aanname ψ
3.	p	`uit` p	aanname
4.	q	`uit` φ, p	$\to E(3, 1)$
5.	r	`uit` ψ, p	$\to E(3, 2)$
6.	$q \wedge r$	`uit` φ, ψ, p	$\wedge I(4, 5)$
7.	$p \to (q \wedge r)$	`uit` φ, ψ	$\to I(6)$

We bewijzen $p \to (q \wedge r) \vdash p \to q$. De aanname $p \to (q \wedge r)$ korten we af als φ.

1.	$p \to (q \wedge r)$	`uit` φ	aanname φ
2.	p	`uit` p	aanname
3.	$q \wedge r$	`uit` φ, p	$\to E(2, 1)$
4.	q	`uit` φ, p	$\wedge E(3)$
5.	$p \to q$	`uit` φ	$\to I(4)$

We bewijzen $p \to (q \wedge r) \vdash p \to r$. De aanname $p \to (q \wedge r)$ korten we af als φ.

1.	$p \to (q \wedge r)$	`uit` φ	aanname φ
2.	p	`uit` p	aanname
3.	$q \wedge r$	`uit` φ, p	$\to E(2, 1)$
4.	r	`uit` φ, p	$\wedge E(3)$
5.	$p \to r$	`uit` φ	$\to I(4)$

4. De aanname $p \vee r$ korten we af als φ en de aanname $q \to r$ korten we af als ψ.

1.	$p \vee r$	`uit` φ	aanname φ
2.	$q \to r$	`uit` ψ	aanname ψ
3.	$p \to q$	`uit` $p \to q$	aanname
4.	p	`uit` p	aanname
5.	q	`uit` $p, p \to q$	$\to E(3,4)$
6.	r	`uit` $p, p \to q, \psi$	$\to E(2,5)$
7.	r	`uit` r	aanname
8.	r	`uit` $\varphi, p \to q, \psi$	$\vee E(1,6,7)$
9.	$(p \to q) \to r$	`uit` φ, ψ	$\to I(8)$

4.2 Bewijs met natuurlijke deductie:

1. $\vdash p \vee \neg p$ (de wet van het Uitgesloten Derde)
2. $\neg p \vee q \vdash p \to q$, en omgekeerd
3. $\neg q \to \neg p \vdash p \to q$ (het principe van contrapositie, zie Voorbeeld 4.6)
4. $p \to (q \vee r) \vdash (p \to q) \vee r$ (hint: gebruik $\vdash r \vee \neg r$)

oplossing:

1. We korten $\neg(p \vee \neg p)$ af als φ.

1.	$\neg(p \vee \neg p)$	`uit` φ	aanname φ
2.	p	`uit` p	aanname
3.	$p \vee \neg p$	`uit` p	$\vee I(2)$
4.	$\neg p$	`uit` φ	$\neg I(1,3)$
5.	$\neg p$	`uit` $\neg p$	aanname
6.	$p \vee \neg p$	`uit` $\neg p$	$\vee I(5)$
7.	p	`uit` φ	$\neg E^*(1,6)$
8.	$p \vee \neg p$	`uit` $\varnothing$	$\neg E^*(4,7)$

2. De aanname $\neg p \vee q$ korten we af als φ.

1.	$\neg p \vee q$	`uit` φ	aanname φ
2.	p	`uit` p	aanname
3.	$\neg p$	`uit` $\neg p$	aanname
4.	q	`uit` $p, \neg p$	$\neg E(2,3)$
5.	q	`uit` q	aanname
6.	q	`uit` φ, p	$\vee E(1,4,5)$
7.	$p \to q$	`uit` φ	$\to I(6)$

We bewijzen $p \to q \vdash \neg p \vee q$. De aannname $p \to q$ korten we af als φ en de aanname $\neg(\neg p \vee q)$ korten we af als ψ.

1.	$p \to q$	`uit` φ	aanname φ
2.	$\neg(\neg p \vee q)$	`uit` ψ	aanname ψ
3.	$\neg p$	`uit` $\neg p$	aanname
4.	$\neg p \vee q$	`uit` $\neg p$	$\vee I(3)$
5.	p	`uit` ψ	$\neg E^*(4,2)$
6.	q	`uit` φ, ψ	$\to E(5,1)$
7.	$\neg p \vee q$	`uit` φ, ψ	$\vee I(6)$
8.	$\neg p \vee q$	`uit` φ	$\neg E^*(7,2)$

3. De aanname $\neg q \to \neg p$ korten we af als φ.

1.	$\neg q \to \neg p$	`uit` φ	aanname φ
2.	p	`uit` p	aanname
3.	$\neg q$	`uit` $\neg q$	aanname
4.	$\neg p$	`uit` $\varphi, \neg q$	$\to E(3,1)$
5.	q	`uit` φ, p	$\neg E^*(2,4)$
6.	$p \to q$	`uit` φ	$\to I(5)$

4. De aanname $p \to (q \vee r)$ korten we af als φ.

1.	$p \to (q \vee r)$	`uit` φ	aanname φ
2.	$r \vee \neg r$	`uit` $\varnothing$	uitgesloten derde
3.	r	`uit` r	aanname
4.	$(p \to q) \vee r$	`uit` r	$\vee I(3)$
5.	$\neg r$	`uit` $\neg r$	aanname
6.	p	`uit` p	aanname
7.	$q \vee r$	`uit` p, φ	$\to E(1,6)$
8.	q	`uit` q	aanname
9.	r	`uit` r	aanname
10.	q	`uit` $r, \neg r$	$\neg E(5,9)$
11.	q	`uit` $p, \varphi, \neg r$	$\vee E(7,8,10)$
12.	$p \to q$	`uit` $\varphi, \neg r$	$\to I(11)$
13.	$(p \to q) \vee r$	`uit` $\varphi, \neg r$	$\vee I(12)$
14.	$(p \to q) \vee r$	`uit` φ	$\vee E(2,4,13)$

4.3 De wetten van De Morgan zijn twee van de zogenaamde *Boolese axioma's*. Bewijs ook de Boolese axioma's voor distributiviteit:

i $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, en omgekeerd

ii $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, en omgekeerd.

oplossing:

i We bewijzen $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

1.	$p \vee (q \wedge r)$	`uit` φ	aanname φ
2.	p	`uit` p	aanname
3.	$p \vee q$	`uit` p	$\vee I(2)$
4.	$q \wedge r$	`uit` $q \wedge r$	aanname
5.	q	`uit` $q \wedge r$	$\wedge E(4)$
6.	$p \vee q$	`uit` $q \wedge r$	$\vee I(5)$
7.	$p \vee q$	`uit` φ	$\vee E(1,3,6)$
8.	p	`uit` p	aanname
9.	$p \vee r$	`uit` p	$\vee I(8)$
10.	$q \wedge r$	`uit` $q \wedge r$	aanname
11.	r	`uit` $q \wedge r$	$\wedge E(10)$
12.	$p \vee r$	`uit` $q \wedge r$	$\vee I(11)$
13.	$p \vee r$	`uit` φ	$\vee E(1,9,12)$
14.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	`uit` φ	$\wedge I(7,13)$

We bewijzen $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	uit φ	aanname φ
2.	$p \vee q$	uit φ	$\wedge E(1)$
3.	p	uit p	aanname
4.	$p \vee (q \wedge r)$	uit p	$\vee I(3)$
5.	q	uit q	aanname
6.	$p \vee r$	uit φ	$\wedge E(1)$
7.	p	uit p	aanname
8.	$p \vee (q \wedge r)$	uit p	$\vee I(7)$
9.	r	uit r	aanname
10.	$q \wedge r$	uit q, r	$\wedge I(5, 9)$
11.	$p \vee (q \wedge r)$	uit q, r	$\vee I(10)$
12.	$p \vee (q \wedge r)$	uit φ, q	$\vee E(6, 8, 11)$
13.	$p \vee (q \wedge r)$	uit φ	$\vee E(2, 4, 12)$

ii We bewijzen $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

1.	$p \wedge (q \vee r)$	uit φ	aanname φ
2.	p	uit φ	$\wedge E(1)$
3.	$q \vee r$	uit φ	$\wedge E(1)$
4.	q	uit q	aanname
5.	$p \wedge q$	uit φ, q	$\wedge I(2, 4)$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	uit φ, q	$\vee I(5)$
7.	r	uit r	aanname
8.	$p \wedge r$	uit φ, r	$\wedge I(2, 7)$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	uit φ, r	$\vee I(8)$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	uit φ	$\vee E(3, 6, 9)$

We bewijzen $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$.

1.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	uit φ	aanname φ
2.	$p \wedge q$	uit $p \wedge q$	aaname
3.	p	uit $p \wedge q$	$\wedge E(2)$
4.	q	uit $p \wedge q$	$\wedge E(2)$
5.	$q \vee r$	uit $p \wedge q$	$\vee I(4)$
6.	$p \wedge (q \vee r)$	uit $p \wedge q$	$\wedge I(3, 5)$
7.	$p \wedge r$	uit $p \wedge r$	aanname
8.	p	uit $p \wedge r$	$\wedge E(7)$
9.	r	uit $p \wedge r$	$\wedge E(7)$
10.	$q \vee r$	uit $p \wedge r$	$\vee I(9)$
11.	$p \wedge (q \vee r)$	uit $p \wedge r$	$\wedge I(8, 10)$
12.	$p \vee (q \wedge r)$	uit φ	$\vee E(1, 6, 11)$

Bewijs de Boolese axioma's voor *absorptie*:

iii $p \vee (p \wedge q) \vdash p$, en omgekeerd

iv $p \wedge (p \vee q) \vdash p$, en omgekeerd.

oplossing:

iii

1.	$p \vee (p \wedge q)$	uit φ	aanname φ
2.	p	uit p	aanname
3.	$p \wedge q$	uit $p \wedge q$	aanname
4.	p	uit $p \wedge q$	$\wedge E(3)$
5.	p	uit φ	$\vee E(1, 2, 4)$

We bewijzen nu $p \vdash p \vee (p \wedge q)$.

1.	p	uit p	aanname
2.	$p \vee (p \wedge q)$	uit p	$\vee I(1)$

iv

1.	$p \wedge (p \vee q)$	uit φ	aanname φ
2.	p	uit φ	$\wedge E(1)$

We bewijzen nu $p \vdash p \wedge (p \vee q)$.

1.	p	uit p	aanname
2.	$p \vee q$	uit p	$\vee I(1)$
3.	$p \wedge (p \vee q)$	uit p	$\wedge I(1, 2)$

4.4 Een formule kan op meerdere plaatsen in een natuurlijke-deductieboom voorkomen. Omdat elk voorkomen van verschillende aannames afhankelijk kan zijn, mogen deze voorkomens niet met elkaar geïdentificeerd worden. Laat dit zien in een voorbeeld.

oplossing: We bewijzen $p \vee q, p \to r, q \to r \vdash r$. We korten $p \vee q$ af als φ, $p \to r$ als ψ en $q \to r$ als χ.

1.	$p \vee q$	uit φ	aanname φ
2.	$p \to r$	uit ψ	aanname ψ
3.	$q \to r$	uit χ	aanname χ
4.	p	uit p	aanname
5.	r	uit ψ, p	$\to E(4, 2)$
6.	q	uit q	aanname
7.	r	uit χ, q	$\to E(6, 3)$
8.	r	uit φ, ψ, χ	$\vee E(1, 5, 7)$

De formule r is in regel 5, 7 en 8 bewezen, resp. uit $\{p \to r, p\}$, uit $\{q \to r, q\}$ en uit $\{p \vee q, p \to r, q \to r\}$.

4.5 Toon zonder beroep op de volledigheidsstelling aan dat, als $\varphi \vdash \psi$ en $\psi \vdash \chi$, dan $\varphi \vdash \chi$.

oplossing: We geven een bewijs in natuurlijke deductie.

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$m.$	ψ	uit φ	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$n.$	χ	uit ψ	$\vdots$
$n+1.$	$\psi \to \chi$	uit $\varnothing$	$\to I(n)$
$n+2.$	χ	uit φ	$\to E(m, n+1)$

4.6 Geef introductie- en gebruiksregels voor de equivalentie $\leftrightarrow$.

oplossing: De formule $\varphi \leftrightarrow \psi$ is logisch equivalent met $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Als er afleidingen van φ uit Φ en van ψ uit Ψ zijn, dan zijn er ook afleidingen van $\varphi \to \psi$ uit $\Psi - \{\varphi\}$ en van $\psi \to \varphi$ uit $\Phi - \{\psi\}$, volgens de $\to$ introductieregel. Dus kunnen we een afleiding van $\varphi \leftrightarrow \psi$ uit $\Psi - \{\varphi\}$ en $\Phi - \{\psi\}$ construeren, met de $\wedge$ introductieregel. De introductieregel voor $\leftrightarrow$ in boom notatie ziet er dus als volgt uit:

$$\frac{\varphi \texttt{ uit } \Phi \qquad \psi \texttt{ uit } \Psi}{\varphi \leftrightarrow \psi \texttt{ uit } (\Phi - \{\psi\}) \cup (\Psi - \{\varphi\})} \leftrightarrow \mathrm{I}$$

Als er afleidingen van $\varphi \leftrightarrow \psi$ uit Φ en van φ uit Ψ zijn, dan kunnen we natuurlijk een afleiding van ψ uit $\Phi \cup \Psi$ construeren (met de regels $\wedge$E en $\to$E). De gebruiksregels voor $\leftrightarrow$ in boom notatie zien er dus als volgt uit:

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi \texttt{ uit } \Phi \qquad \varphi \texttt{ uit } \Psi}{\psi \texttt{ uit } \Phi \cup \Psi} \leftrightarrow \mathrm{E} \qquad\qquad \frac{\varphi \leftrightarrow \psi \texttt{ uit } \Phi \qquad \psi \texttt{ uit } \Psi}{\varphi \texttt{ uit } \Phi \cup \Psi} \leftrightarrow \mathrm{E}$$

4.10 Bewijs met natuurlijke deductie:

1. $p \wedge (q \wedge r) \vdash r \wedge p$
2. $p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow s, p \vdash s$
3. $p \rightarrow (p \rightarrow q) \vdash p \rightarrow q$
4. $(p \wedge \neg q) \rightarrow r, p \vdash \neg q \rightarrow (r \vee s)$
5. $(p \vee q) \rightarrow r \vdash q \rightarrow r$
6. $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \vdash r \vee s$
7. $p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow \neg p$
8. $p \vee q, \neg q \vdash \neg(p \rightarrow q)$
9. $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
10. $\neg p, \neg q \vdash \neg((p \rightarrow q) \rightarrow q)$
11. $\neg p \rightarrow q \vdash p \vee q$

oplossing:

1. We bewijzen $p \wedge (q \wedge r) \vdash r \wedge p$.

1.	$p \wedge (q \wedge r)$	uit φ	aanname φ
2.	p	uit φ	$\wedge E(1)$
3.	$q \wedge r$	uit φ	$\wedge E(1)$
4.	r	uit φ	$\wedge E(3)$
5.	$r \wedge p$	uit φ	$\wedge I(4,2)$

2. We bewijzen $p \rightarrow (q \wedge r), q \rightarrow s, p \vdash s$.

1.	$p \rightarrow (q \wedge r)$	uit φ	aanname φ
2.	$q \rightarrow s$	uit ψ	aanname ψ
3.	p	uit p	aanname p
4.	$q \wedge r$	uit φ, p	$\rightarrow E(1,3)$
5.	q	uit φ, p	$\wedge E(4)$
6.	s	uit φ, ψ, p	$\rightarrow E(2,5)$

3. We bewijzen $p \rightarrow (p \rightarrow q) \vdash p \rightarrow q$.

1.	$p \rightarrow (p \rightarrow q)$	uit φ	aanname φ
2.	$\quad p$	uit p	aanname
3.	$\quad p \rightarrow q$	uit φ, p	$\rightarrow E(1,2)$
4.	$\quad q$	uit φ, p	$\rightarrow E(2,3)$
5.	$p \rightarrow q$	uit φ	$\rightarrow I(4)$

4. We bewijzen $(p \wedge \neg q) \rightarrow r, p \vdash \neg q \rightarrow (r \vee s)$.

1.	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$	uit φ	aanname φ
2.	p	uit p	aanname
3.	$\quad \neg q$	uit $\neg q$	aanname
4.	$\quad p \wedge \neg q$	uit $p, \neg q$	$\wedge I(2,3)$
5.	$\quad r$	uit $\varphi, p, \neg q$	$\rightarrow E(1,4)$
6.	$\quad r \vee s$	uit $\varphi, p, \neg q$	$\vee I(5)$
7.	$\neg q \rightarrow (r \vee s)$	uit φ, p	$\rightarrow I(6)$

5. We bewijzen $(p \vee q) \rightarrow r \vdash q \rightarrow r$.

1.	$(p \vee q) \rightarrow r$	`uit` φ	aanname φ
2.	q	`uit` q	aanname
3.	$p \vee q$	`uit` q	$\vee I(2)$
4.	r	`uit` φ, q	$\rightarrow E(1,3)$
5.	$q \rightarrow r$	`uit` φ	$\rightarrow I(4)$

6. We bewijzen $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \vdash r \vee s$.

1.	$p \vee q$	`uit` φ	aanname φ
2.	$p \rightarrow r$	`uit` ψ	aanname ψ
3.	$q \rightarrow s$	`uit` χ	aanname χ
4.	p	`uit` p	aanname
5.	r	`uit` ψ, p	$\rightarrow E(2,4)$
6.	$r \vee s$	`uit` ψ, p	$\vee I(5)$
7.	q	`uit` q	aanname
8.	s	`uit` χ, q	$\rightarrow E(3,7)$
9.	$r \vee s$	`uit` χ, q	$\vee I(8)$
10.	$r \vee s$	`uit` φ, ψ, χ	$\vee E(1,6,9)$

7. We bewijzen $p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow \neg p$.

1.	$p \rightarrow \neg q$	`uit` φ	aanname φ
2.	q	`uit` q	aanname
3.	p	`uit` p	aanname
4.	$\neg q$	`uit` φ, p	$\rightarrow E(1,3)$
5.	$\neg p$	`uit` φ, q	$\neg E^*(2,4)$
6.	$q \rightarrow \neg p$	`uit` φ	$\rightarrow I(5)$

8. We bewijzen $p \vee q, \neg q \vdash \neg(p \rightarrow q)$.

1.	$p \vee q$	`uit` $p \vee q$	aanname
2.	$\neg q$	`uit` $\neg q$	aanname
3.	$p \rightarrow q$	`uit` $p \rightarrow q$	aanname
4.	p	`uit` p	aanname
5.	q	`uit` $p, p \rightarrow q$	$\rightarrow E(3,4)$
6.	q	`uit` q	aanname
7.	q	`uit` $p \vee q, p \rightarrow q$	$\vee E(1,5,6)$
8.	$\neg(p \rightarrow q)$	`uit` $p \vee q, \neg q$	$\neg I(2,7)$

9. We bewijzen $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$.

1.	$\neg p$	`uit` $\neg p$	aanname
2.	p	`uit` p	aanname
3.	q	`uit` $p, \neg p$	$\neg E(1,2)$
4.	$p \rightarrow q$	`uit` $\neg p$	$\rightarrow I(3)$
5.	$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	`uit` $\emptyset$	$\rightarrow I(4)$

10. We bewijzen $\neg p, \neg q \vdash \neg((p \rightarrow q) \rightarrow q)$.

1.	$\neg p$	`uit` $\neg p$	aanname
2.	$\neg q$	`uit` $\neg q$	aanname
3.	$(p \rightarrow q) \rightarrow q$	`uit` φ	aanname φ
4.	p	`uit` p	aanname
5.	q	`uit` $p, \neg p$	$\neg E(1,4)$
6.	$p \rightarrow q$	`uit` $\neg p$	$\rightarrow I(5)$
7.	q	`uit` $\varphi, \neg p$	$\rightarrow E(3,6)$
8.	$\neg((p \rightarrow q) \rightarrow q)$	`uit` $\neg p, \neg q$	$\neg I(2,7)$

11. We bewijzen $\neg p \to q \vdash p \vee q$.

1.	$\neg p \to q$	uit φ	aanname φ
2.	$\quad \neg(p \vee q)$	uit $\neg(p \vee q)$	aanname
3.	$\quad\quad p$	uit p	aanname
4.	$\quad\quad p \vee q$	uit p	$\vee I(3)$
5.	$\quad \neg p$	uit $\neg(p \vee q)$	$\neg I(2,4)$
6.	$\quad q$	uit $\varphi, \neg(p \vee q)$	$\to E(1,5)$
7.	$\quad\quad q$	uit q	aanname
8.	$\quad\quad p \vee q$	uit q	$\vee I(7)$
9.	$\quad \neg q$	uit $\neg(p \vee q)$	$\neg I(2,8)$
10.	$p \vee q$	uit φ	$\neg E^*(6,9)$