Logica voor Informatici – najaar 2000
Opgaven en Oplossingen – Hoofdstuk 3

3.1 Stel
$$\begin{array}{lcl} \varphi, \psi & \models & \alpha, \\ \beta & \models & \gamma, \text{ en} \\ \psi, \alpha, \gamma & \models & \chi. \end{array}$$

Indien nu bovendien bekend wordt dat χ onwaar is, maar ψ en β waar, wat weet u dan over φ?

oplossing: Laat V een waardering zijn zodat $V(\chi) = 0$, $V(\psi) = 1$ en $V(\beta) = 1$. Wegens $\beta \models \gamma$ geldt dan ook $V(\gamma) = 1$. Dat betekent dat $V(\alpha) = 0$ omdat, volgens $\psi, \alpha, \gamma \models \chi$, één van de formules ψ, α, γ onwaar moet zijn. Evenzo geldt, wegens $\varphi, \psi \models \alpha$, dat $V(\varphi) = 0$. Met andere woorden, φ is onwaar.

3.2 Toon aan:
$$\begin{array}{lcl} \varphi_1, \varphi_2 \models \psi & \Leftrightarrow & \varphi_1 \models \varphi_2 \to \psi \\ & \Leftrightarrow & \models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi) \\ & \Leftrightarrow & \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi \end{array}$$

oplossing: Merk eerst op dat $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ betekent dat de sequent $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi$ geen tegenvoorbeelden heeft, d.w.z. dat er geen waardering V bestaat met $V(\varphi_1) = 1, \ldots, V(\varphi_n) = 1$, en $V(\psi) = 0$. Het is dus voldoende om te laten zien dat de sequenten

$$\begin{array}{l} \varphi_1, \varphi_2 \circ \psi \\ \varphi_1 \circ \varphi_2 \to \psi \\ \circ\ \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi) \\ \circ\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi \end{array}$$

dezelfde tegenvoorbeelden hebben.

In het algemeen geldt: $V(\alpha \to \beta) = 0 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$ en $V(\beta) = 0$. Dus geldt voor iedere waardering V dat

$$\begin{array}{ll} & V(\varphi_1) = 1 \text{ en } V(\varphi_2) = 1 \text{ en } V(\psi) = 0 \\ \Leftrightarrow & V(\varphi_1) = 1 \text{ en } V(\varphi_2 \to \psi) = 0 \\ \Leftrightarrow & V(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi)) = 0. \end{array}$$

Dit betekent dat de eerste drie bovenstaande sequenten dezelfde tegenvoorbeelden hebben. Ook geldt dus dat

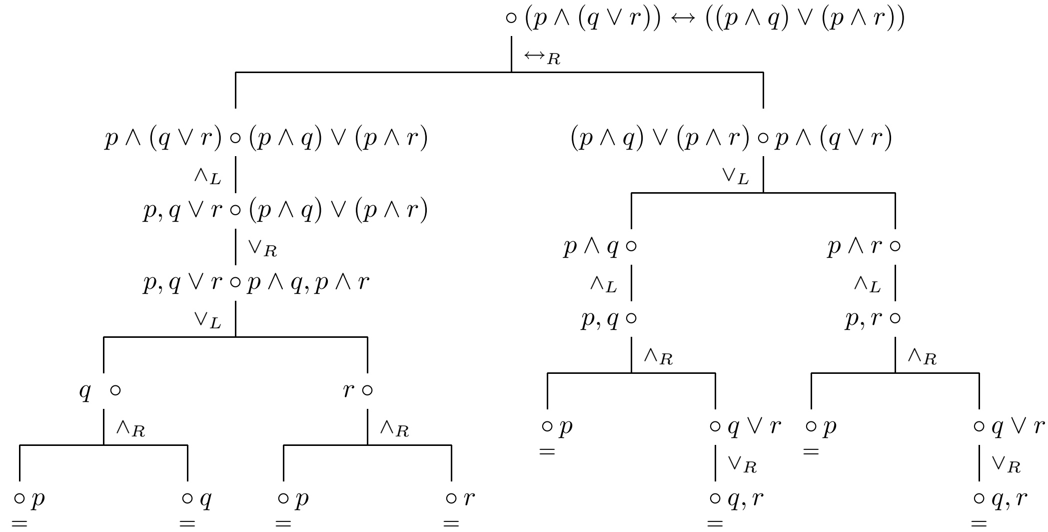
$$\begin{array}{ll} & V(\varphi_1) = 1 \text{ en } V(\varphi_2) = 1 \text{ en } V(\psi) = 0 \\ \Leftrightarrow & V(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 1 \text{ en } V(\psi) = 0 \\ \Leftrightarrow & V((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi) = 0 \end{array}$$

en dat betekent dat de eerste en laatste sequent (en de sequent $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \circ \psi$) dezelfde tegenvoorbeelden hebben.

3.3 Test met een semantisch tableau of de volgende equivalenties tautologieën zijn (als dat niet zo is, geef de tegenvoorbeelden):

(i) $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

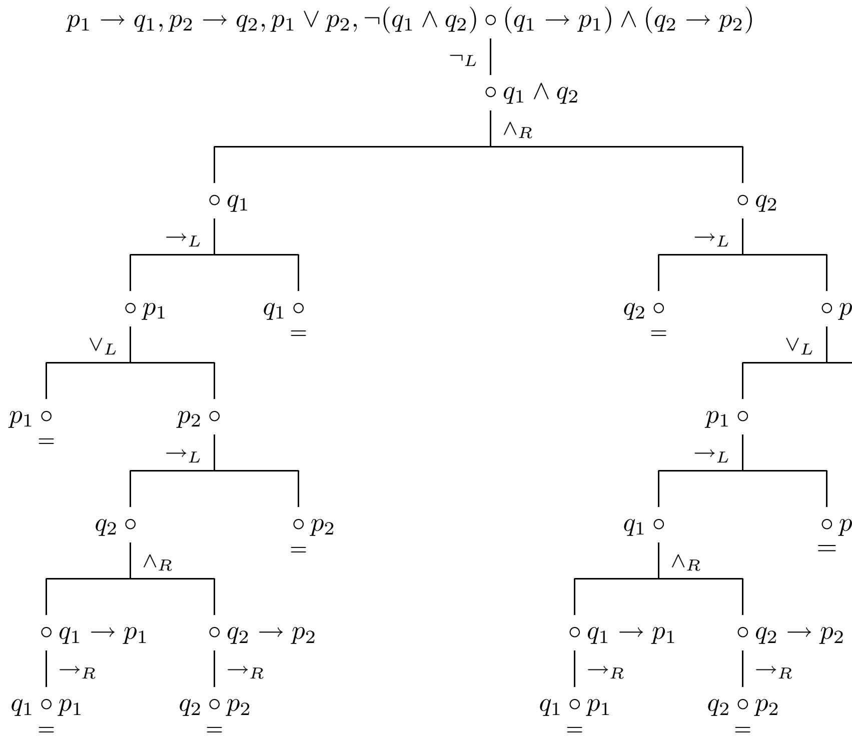
oplossing: Het volgende tableau sluit, dus is deze formule een tautologie. Voor de overzichtelijkheid geven we een tableau in vereenvoudigde notatie.



3.4 (a) Bewijs met een tableau de zogenaamde 'Wet van Hauber', die onder bepaalde voorwaarden omkeren van implicatie toestaat:

$$p_1 \to q_1, p_2 \to q_2, p_1 \vee p_2, \neg(q_1 \wedge q_2) \models (q_1 \to p_1) \wedge (q_2 \to p_2).$$

oplossing: We geven een tableau in vereenvoudigde vorm, wegens de grote omvang van een volledig tableau. Een mogelijk tableau is:

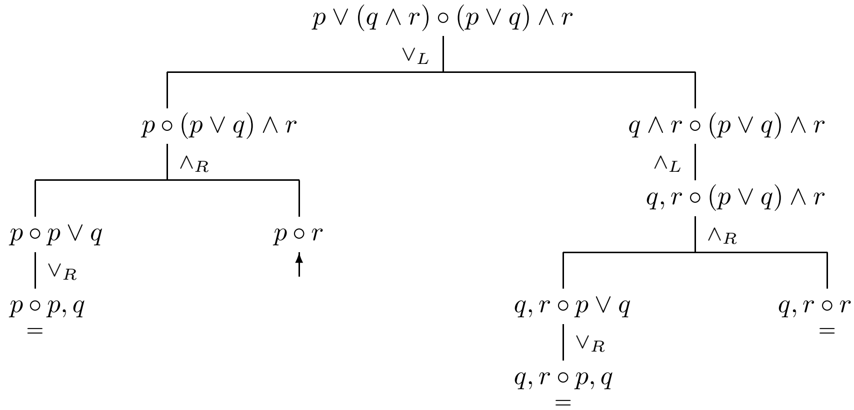


Elke tak van het tableau sluit. Het tableau sluit dus, en de wet is geldig.

(b) Laat zien dat de volgende gevolgtrekkingen niet geldig zijn:

(i) $p \vee (q \wedge r)/(p \vee q) \wedge r$

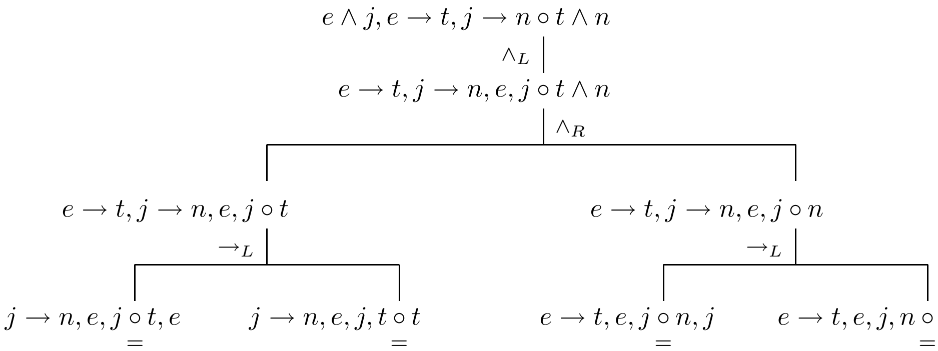
oplossing: Een mogelijk tableau voor de gevolgtrekking $p \vee (q \wedge r)/(p \vee q) \wedge r$ is:



Het tableau is open dus de gevolgtrekking is ongeldig. De open tak levert $V(p) = 1$ en $V(r) = 0$. Omdat de waarde van q kennelijk niet uitmaakt, hebben we dus twee tegenvoorbeelden V_1 en V_2:
$V_1(p) = 1$ en $V_1(q) = V_1(r) = 0$, en
$V_2(p) = V_2(q) = 1$ en $V_2(r) = 0$.

3.8 Laat door middel van een semantisch tableau zien dat de gevolgtrekking over Eva en Jan op blz. 11 geldig is.

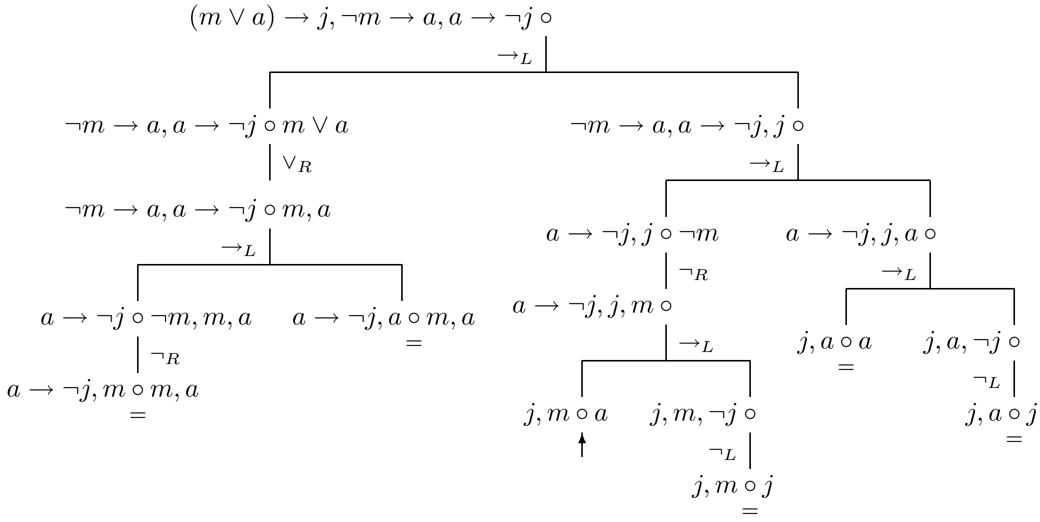
oplossing: We willen zien of de gevolgtrekking $e \wedge j, e \to t, j \to n / t \wedge n$ geldig is. Een mogelijk tableau voor deze gevolgtrekking is:



Alle takken van dit tableau sluiten, dus de gevolgtrekking $e \wedge j, e \to t, j \to n / t \wedge n$ over Eva en Jan is geldig.

3.9 Bepaal alle modellen van $\{\varphi, \psi, \chi\}$ door middel van een semantisch tableau voor de sequent $\varphi, \psi, \chi \circ$. Is $\{\varphi, \psi, \chi\}$ consistent? Neem voor φ, ψ, χ de formules van Voorbeeld 2.13 of van Opgave 2.9.

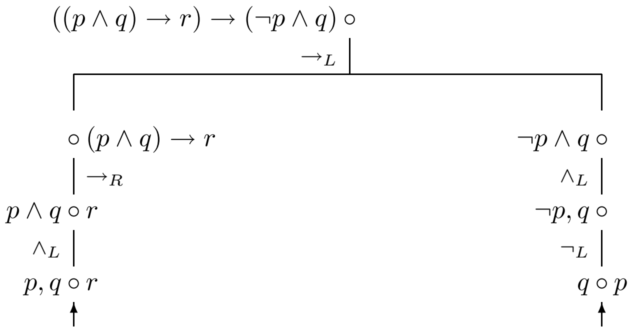
oplossing: We nemen voor φ, ψ, χ de formules van Voorbeeld 2.13, dus $\varphi = (m \vee a) \to j$, $\psi = \neg m \to a$ en $\chi = a \to \neg j$. Een mogelijk tableau voor de sequent $\varphi, \psi, \chi \circ$ is:



Dit tableau bevat een open tak (aangegeven door de pijl) waarvan we een tegenvoorbeeld voor de sequent $\varphi, \psi, \chi \circ$ kunnen aflezen, namelijk de waardering V die j en m waar maakt en a onwaar maakt. Dus de formuleverzameling $\{\varphi, \psi, \chi\}$ heeft precies één model (V). Daaruit volgt dat $\{\varphi, \psi, \chi\}$ consistent is.

3.10 Laat $\varphi = ((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \wedge q)$. Maak een semantisch tableau voor de sequent $\varphi\circ$, en bepaal daaruit een disjuntieve normaalvorm voor φ (zie Opgave 2.5).

oplossing: Een semantisch tableau voor $\varphi\circ$ is:



De linker open tak geeft het tegenvoorbeeld $V(p) = V(q) = 1$, $V(r) = 0$, of als formule: $p \wedge q \wedge \neg r$. De rechter open tak geeft twee tegenvoorbeelden met $V(q) = 1$, $V(p) = 0$ of als formule: $q \wedge \neg p$. Dus een disjunctieve normaalvorm voor φ is de formule $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p)$.

3.11 Maak reductieregels voor de connectieven

1. noch α noch β
2. <u>if</u> α <u>then</u> β <u>else</u> γ

(zie Opgaven 2.4 en 2.10). Laat nu, met gebruikmaking van deze reductieregels, zien dat (noch p noch r) $\to \neg$(<u>if</u> p <u>then</u> q <u>else</u> r) een tautologie is.

oplossing:

1. Van Opgave 2.4.1 weten we dat noch α noch β logisch equivalent is met $\neg\alpha \wedge \neg\beta$. Om de reductieregels voor noch α noch β te vinden kunnen we dus semantische tableaux voor de sequenten $\Phi, \neg\alpha \wedge \neg\beta \circ \Psi$ (voor de linker reductieregel) en $\Phi \circ \neg\alpha \wedge \neg\beta, \Psi$ (voor de rechter reductieregel) maken:

$\Phi, \neg\alpha \wedge \neg\beta \circ \Psi$

$\wedge_L$

$\Phi, \neg\alpha, \neg\beta \circ \Psi$

$\neg_L$

$\Phi, \neg\beta \circ \alpha, \Psi$

$\neg_L$

$\Phi \circ \alpha, \beta, \Psi$

$\Phi \circ \neg\alpha \wedge \neg\beta, \Psi$

$\wedge_R$

$\Phi \circ \neg\alpha, \Psi$ $\qquad$ $\Phi \circ \neg\beta, \Psi$

$\neg_R$ $\qquad$ $\neg_R$

$\Phi, \alpha \circ \Psi$ $\qquad$ $\Phi, \beta \circ \Psi$

Hieruit krijgen we de volgende reductieregels:

noch noch$_L$: $\quad$ Φ, noch α noch $\beta \circ \Psi$

$\Phi \circ \alpha, \beta, \Psi$

noch noch$_R$: $\quad$ $\Phi \circ$ noch α noch β, Ψ

$\Phi, \alpha \circ \Psi$ $\qquad$ $\Phi, \beta \circ \Psi$

2. Van Opgave 2.4.5 weten we dat if α then β else γ logisch equivalent is met $(\alpha \to \beta) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)$. We maken eerst de linker regel, dus we maken een semantisch tableau voor de sequent $\Phi, (\alpha \to \beta) \wedge (\neg\alpha \to \gamma) \circ \Psi$:

$\Phi, (\alpha \to \beta) \wedge (\neg\alpha \to \gamma) \circ \Psi$

$\wedge_L$

$\Phi, \alpha \to \beta, \neg\alpha \to \gamma \circ \Psi$

$\to_L$

$\Phi, \neg\alpha \to \gamma \circ \alpha, \Psi$ $\qquad$ $\Phi, \neg\alpha \to \gamma, \beta \circ \Psi$

$\to_L$ $\qquad$ $\to_L$

$\Phi \circ \neg\alpha, \alpha, \Psi$ $\qquad$ $\Phi, \gamma \circ \alpha, \Psi$ $\qquad$ $\Phi, \beta \circ \neg\alpha, \Psi$ $\qquad$ $\Phi, \beta, \gamma \circ \Psi$

$\neg_R$ $\qquad$ $\neg_R$

$\Phi, \alpha \circ \alpha, \Psi$ $\qquad$ $\Phi, \alpha, \beta \circ \Psi$

$=$

Natuurlijk hoeven we alleen de open takken in de reductieregel over te nemen. We krijgen dus de volgende reductieregel:

if then else$_L$: $\quad$ Φ, if α then β else $\gamma \circ \Psi$

$\Phi, \gamma \circ \alpha, \Psi$ $\qquad$ $\Phi, \alpha, \beta \circ \Psi$ $\qquad$ $\Phi, \beta, \gamma \circ \Psi$

Een semantisch tableau voor de sequent $\Phi \circ (\alpha \to \beta) \wedge (\neg\alpha \to \gamma), \Psi$ is:

$\Phi \circ (\alpha \to \beta) \wedge (\neg\alpha \to \gamma), \Psi$

$\wedge_R$

$\Phi \circ \alpha \to \beta, \Psi$ $\qquad$ $\Phi \circ \neg\alpha \to \gamma, \Psi$

$\to_R$ $\qquad$ $\to_R$

$\Phi, \alpha \circ \beta, \Psi$ $\qquad$ $\Phi, \neg\alpha \circ \gamma, \Psi$

$\neg_L$

$\Phi \circ \alpha, \gamma, \Psi$

We krijgen dus de volgende reductieregel:

if then else$_R$: $\quad \Phi \circ \underline{\text{if}}\ \alpha\ \underline{\text{then}}\ \beta\ \underline{\text{else}}\ \gamma, \Psi$

$$\Phi, \alpha \circ \beta, \Psi \qquad\qquad \Phi \circ \alpha, \gamma, \Psi$$

We merken tenslotte op dat bovenstaande L-reductieregel wel correct is, maar niet optimaal. Door gebruik te maken van de logische equivalentie van $\underline{\text{if}}\ \alpha\ \underline{\text{then}}\ \beta\ \underline{\text{else}}\ \gamma$ en de formule $(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \gamma)$ krijgen we de volgende reductieregel:

if then else$_L$: $\quad \Phi, \underline{\text{if}}\ \alpha\ \underline{\text{then}}\ \beta\ \underline{\text{else}}\ \gamma \circ \Psi$

$$\Phi, \alpha, \beta \circ \Psi \qquad\qquad \Phi, \gamma \circ \alpha, \Psi$$

Het volgende tableau sluit, dus is (noch p noch r) $\rightarrow \neg(\underline{\text{if}}\ p\ \underline{\text{then}}\ q\ \underline{\text{else}}\ r)$ een tautologie.

$$\circ\ (\text{noch } p \text{ noch } r) \rightarrow \neg(\underline{\text{if}}\ p\ \underline{\text{then}}\ q\ \underline{\text{else}}\ r)$$

$$\Big|\ \rightarrow_R$$

$$\text{noch } p \text{ noch } r \circ \neg(\underline{\text{if}}\ p\ \underline{\text{then}}\ q\ \underline{\text{else}}\ r)$$

$$\Big|\ \neg_R$$

$$\text{noch } p \text{ noch } r, \underline{\text{if}}\ p\ \underline{\text{then}}\ q\ \underline{\text{else}}\ r \circ$$

$$\text{noch noch}_L\ \Big|$$

$$\underline{\text{if}}\ p\ \underline{\text{then}}\ q\ \underline{\text{else}}\ r \circ p, r$$

$$\text{if then else}_L\ \Big|$$

$$\underset{=}{p, q \circ p, r} \qquad\qquad \underset{=}{r \circ p, r}$$

waarbij we de laatste van de twee if then else$_L$ reductieregels gebruikt hebben.