Logica voor Informatici – najaar 2000

Opgaven en Oplossingen – Hoofdstuk 2

2.1 Geef de volgende zinnen weer in propositionele notatie:

i ‘Als de bus niet komt, komen de tram en de trein’

oplossing: We voeren de volgende schematische letters in: De letter b voor ‘De bus komt’, de letter m voor ‘De tram komt’, en de letter n voor ‘De trein komt’.

De vertaling van ‘de tram en de trein komen’ is nu $(m \wedge n)$, de vertaling van ‘de bus komt niet’ is $\neg b$, en de verdere vertaling van de zin ‘Als $\neg b$, dan $(m \wedge n)$’ is dus $(\neg b \to (m \wedge n))$.

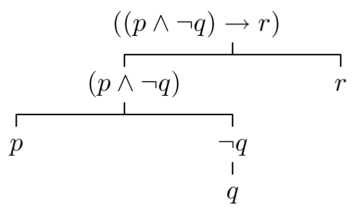
ii ‘Als de tram komt als de trein niet komt, dan komen de trein en de bus niet allebei’

oplossing: ‘De trein komt niet’ vertalen we als $\neg n$. ‘De tram komt als de trein niet komt’ vertalen we als $(\neg n \to m)$. ‘De trein en de bus komen niet allebei’ vertalen we als $\neg(n \wedge b)$. Dus de hele zin vertalen we als $((\neg n \to m) \to \neg(n \wedge b))$.

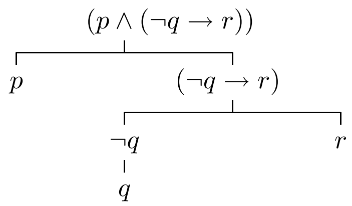
2.2 Geef alle formules die met haakjes invoegen zijn te maken uit $p \wedge \neg q \to r$, met de bijbehorende constructiebomen.

oplossing: De formule moet van de vorm $(\varphi \to \psi)$ of van de vorm $(\varphi \wedge \psi)$ zijn. In het eerste geval is $\varphi = (p \wedge \neg q)$ en $\psi = r$. In het tweede geval is $\varphi = p$ en moet ψ door haakjes invoegen te maken zijn uit $\neg q \to r$, d.w.z. $\psi = \neg(q \to r)$ of $\psi = (\neg q \to r)$. Zo krijgen we dus de volgende drie formules.

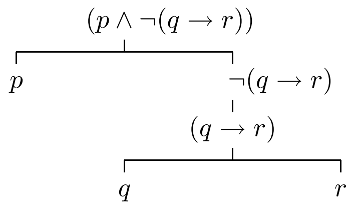
(a) $((p \wedge \neg q) \to r)$



(b) $(p \wedge (\neg q \to r))$



(c) $(p \wedge \neg(q \to r))$



2.3 Welke getallen x voldoen aan de volgende condities, waarbij $p =$ ‘$x \leq 1$’, $q =$ ‘$x \leq 3$’ en $r =$ ‘$x \geq 2$’:

i $\neg(p \wedge q) \wedge r$

oplossing: De formule $(p \wedge q)$ vertalen we als '$x \leq 1$ en $x \leq 3$'. Dit is equivalent met '$x \leq 1$'. Dus $\neg(p \wedge q)$ vertalen we als '$x > 1$' en $(\neg(p \wedge q) \wedge r)$ vertalen we als '$x > 1$ en $x \geq 2$'. Dit is equivalent met '$x \geq 2$'.

ii $(\neg p \wedge q) \wedge r$

oplossing: De formule $\neg p$ vertalen we als '$x > 1$'. Dus $(\neg p \wedge q)$ als '$x > 1$ en $x \leq 3$' en $(\neg p \wedge q) \wedge r$ als '$x > 1$ en $x \leq 3$ en $x \geq 2$'. Dit is equivalent met '$2 \leq x \leq 3$'.

iii $\neg(p \wedge (q \wedge r))$

oplossing: De formule $(q \wedge r)$ vertalen we als '$x \leq 3$ en $x \geq 2$' en $(p \wedge (q \wedge r))$ als '$x \leq 1$ en $x \leq 3$ en $x \geq 2$'. Hieraan voldoet geen enkel getal, dus aan $\neg(p \wedge (q \wedge r))$ voldoet ieder getal.

2.4 Maak een waarheidstabel voor elk van de volgende connectieven. Geef ook een logisch equivalente formule met alleen standaardconnectieven.

1. noch φ noch ψ

oplossing:

φ	ψ	noch φ noch ψ	$(\neg\varphi$	$\wedge$	$\neg\psi)$
1	1	0	0	**0**	0
1	0	0	0	**0**	1
0	1	0	1	**0**	0
0	0	1	1	**1**	1

Zie ook Voorbeeld 2.18, p.29 (het NOR connectief).
Een andere logisch equivalente formule is $\neg(\varphi \vee \psi)$.

2. φ alleen als ψ

oplossing:

φ	ψ	φ alleen als ψ	$(\varphi \to \psi)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

3. φ tenzij ψ

oplossing:

φ	ψ	φ tenzij ψ	$(\varphi$	$\leftrightarrow$	$\neg\psi)$
1	1	0	1	**0**	0
1	0	1	1	**1**	1
0	1	1	0	**1**	0
0	0	0	0	**0**	1

4. φ mits ψ

oplossing:

φ	ψ	φ mits ψ	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

5. <u>if</u> φ <u>then</u> ψ <u>else</u> χ (in C^{++}: φ ? ψ : χ)

oplossing:

φ	ψ	χ	<u>if</u> φ <u>then</u> ψ <u>else</u> χ	((φ	$\to$	ψ)	$\wedge$	(	$\neg\varphi$	$\to$	χ))
1	1	1	1		1		**1**		0	1	
1	1	0	1		1		**1**		0	1	
1	0	1	0		0		**0**		0	1	
1	0	0	0		0		**0**		0	1	
0	1	1	1		1		**1**		1	1	
0	1	0	0		1		**0**		1	0	
0	0	1	1		1		**1**		1	1	
0	0	0	0		1		**0**		1	0	

Een andere logisch equivalente formule is $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \chi)$.

6. óf φ óf ψ (dit is "exclusive or": $\varphi \oplus \psi$, φ <u>xor</u> ψ)

oplossing:

φ	ψ	óf φ óf ψ	φ tenzij ψ	$(\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	0

Een andere logisch equivalente formule is $(\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$.

2.5 Geef een disjunctieve normaalvorm voor $((p\wedge q) \to r) \to (\neg p\wedge q)$. Doe dit op twee manieren: (1) met behulp van een waarheidstabel, en (2) door het toepassen van logische equivalenties. Doe dit ook voor $((p \vee q) \to r) \to (\neg p \wedge q)$.

oplossing: (1) Waarheidstabel voor $((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \wedge q)$:

p	q	r	((p	$\wedge$	q)	$\to$	r)	$\to$	(	$\neg p$	$\wedge$	q)
1	1	1		1		1		**0**		0	0	
1	1	0		1		0		**1**		0	0	
1	0	1		0		1		**0**		0	0	
1	0	0		0		1		**0**		0	0	
0	1	1		0		1		**1**		1	1	
0	1	0		0		1		**1**		1	1	
0	0	1		0		1		**0**		1	0	
0	0	0		0		1		**0**		1	0	

De waarheidstabel laat zien dat de formule $((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \wedge q)$ drie modellen heeft: $(p\wedge q\wedge\neg r)$, $(\neg p\wedge q\wedge r)$ en $(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$. Dus $(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$ is een disjunctieve normaalvorm voor $((p\wedge q) \to r) \to (\neg p\wedge q)$. Natuurlijk is $(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$ logisch equivalent met $(\neg p\wedge q)$. Dus $(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q)$ is ook een disjunctieve normaalvorm voor $((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \wedge q)$.

(2) De formule $((p \wedge q) \to r)$ is logisch equivalent met $\neg(p \wedge q) \vee r$ omdat $\varphi \to \psi$ logisch equivalent is met $\neg\varphi \vee \psi$. De formule $((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \wedge q)$ is dus logisch equivalent met $\neg(\neg(p \wedge q) \vee r) \vee (\neg p \wedge q)$. Dit is, volgens de wet van De Morgan, equivalent met $(\neg\neg(p\wedge q)\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q)$. Van Voorbeeld 2.15 (dubbele negatie) weten we dat $\neg\neg\varphi$ logisch equivalent is met φ. Dus de formule $(\neg\neg(p \wedge q) \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q)$ is logisch equivalent met $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q)$ (en dit is een disjunctieve normaalvorm).

(1) Waarheidstabel voor $((p \vee q) \to r) \to (\neg p \wedge q)$:

p	q	r	$((p$	$\vee$	$q)$	$\rightarrow$	$r)$	$\rightarrow$	$($	$\neg p$	$\wedge$	$q)$
1	1	1		1		1		**0**		0	0	
1	1	0		1		0		**1**		0	0	
1	0	1		1		1		**0**		0	0	
1	0	0		1		0		**1**		0	0	
0	1	1		1		1		**1**		1	1	
0	1	0		1		0		**1**		1	1	
0	0	1		0		1		**0**		1	0	
0	0	0		0		1		**0**		1	0	

De waarheidstabel laat zien dat de formule $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \wedge q)$ vier modellen heeft: $(p \wedge q \wedge \neg r)$, $(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$, $(\neg p \wedge q \wedge r)$ en $(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$. Dus $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$ is een disjunctieve normaalvorm voor $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \wedge q)$. Natuurlijk is de formule $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ logisch equivalent met $(p \wedge \neg r)$ en de formule $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$ is logisch equivalent met $(\neg p \wedge q)$. Dus $(p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q)$ is ook een disjunctieve normaalvorm voor $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \wedge q)$.

(2) De formule $((p \vee q) \rightarrow r)$ is logisch equivalent met $\neg(p \vee q) \vee r$ omdat $\varphi \rightarrow \psi$ logisch equivalent is met $\neg\varphi \vee \psi$. De formule $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \wedge q)$ is dus logisch equivalent met $\neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee (\neg p \wedge q)$.

De formule $\neg(\neg(p \vee q) \vee r)$ is, volgens de wet van De Morgan en de dubbele negatie wet, logisch equivalent met $((p \vee q) \wedge \neg r)$. Deze formule is, volgens de distributiviteitswet, logisch equivalent met $(p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)$.

Dus de formule $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \wedge q)$ is logisch equivalent met $(p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q)$ (en dit is een disjunctieve normaalvorm).

2.6 Bepaal alle waarheidsfuncties die te definiëren zijn met behulp van een formule die alleen gebruik maakt van de twee propositieletters p, q en het connectief $\rightarrow$. (Eén hiervan is de disjunctie $\vee$).

oplossing: Met behulp van het connectief $\rightarrow$ en de propositieletters p en q zijn, behalve de atomaire proposities p en q, nog vier niet logisch equivalente formules te construeren. We geven ze met de bijbehorende waarheidstabel:

p	q	$(p \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$((p \rightarrow q) \rightarrow q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0

Er zijn geen andere waarheidsfuncties mogelijk omdat de waarheidstabel voor $\varphi \rightarrow \psi$ verkregen wordt door in die van ψ één of meer nullen in enen te veranderen (en wanneer we in één van bovenstaande 6 kolommen nullen in enen veranderen, krijgen we altijd één van de andere kolommen).

2.9 Willem eet in een snackbar en daarover doet hij de volgende mededelingen:

1. Ik eet patat of een hamburger.
2. Als ik een hamburger eet, dan neem ik ook een milkshake.
3. Als ik patat en een hamburger eet, dan neem ik géén milkshake.
4. Als ik een milkshake neem, dan eet ik patat.

Eet Willem patat? Eet Willem een hamburger?
Bepaal het antwoord op deze vragen met behulp van een waarheidstabel (modeleliminatie).

oplossing: We voeren de volgende schematische letters in: De letter p voor 'Ik eet patat', de letter h voor 'Ik eet een hamburger' en de letter m voor 'Ik neem een milkshake'. Dus 1-4 vertalen we als

1. $p \vee h$
2. $h \to m$
3. $(p \wedge h) \to \neg m$
4. $m \to p$.

p	h	m	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3,4\}$
1	1	1	ja	ja	nee	–
1	1	0	ja	nee	–	–
1	0	1	ja	ja	ja	ja
1	0	0	ja	ja	ja	ja
0	1	1	ja	ja	ja	nee
0	1	0	ja	nee	–	–
0	0	1	nee	–	–	–
0	0	0	nee	–	–	–

Er zijn dus twee waarderingen V die een model zijn voor de vier formules. In beide waarderingen is $V(p) = 1$ en $V(h) = 0$. Dus, Willem eet patat maar hij eet géén hamburger.

2.10 Laat zien dat de volgende formules logisch equivalent zijn:

1. $p \to q$ en $\neg p \vee q$ en $\neg(p \wedge \neg q)$

   oplossing: Volgens Definitie 2.8 heten twee formules φ en ψ *logisch equivalent* als de formule $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ een tautologie is.

p	q	$(p$	$\to$	$q)$	$\leftrightarrow$	$($	$\neg p$	$\vee$	$q)$
1	1		1		**1**		0	1	
1	0		0		**1**		0	0	
0	1		1		**1**		1	1	
0	0		1		**1**		1	1	

   Deze waarheidstabel laat zien dat $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ een tautologie is; dus $p \to q$ en $\neg p \vee q$ zijn logisch equivalent. We kunnen natuurlijk met behulp van een waarheidstabel laten zien dat ook $\neg(p \wedge \neg q)$ hiermee logisch equivalent is, maar deze keer laten we het zien door bekende logische equivalenties te gebruiken. De wet van De Morgan zegt: $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$. Laat nu $\varphi = p$ en $\psi = \neg q$; dan zegt deze wet: $\neg(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg\neg q)$. Van Voorbeeld 2.15 (dubbele negatie) weten we dat $\neg\neg q$ logisch equivalent is met q. Dus, $\neg(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ is een tautologie en dus is $\neg(p \wedge \neg q)$ logisch equivalent met $\neg p \vee q$.

2. $p \to q$ en $\neg q \to \neg p$

   oplossing: Weer door bekende logische equivalenties te gebruiken:

$$\begin{aligned} (p \to q) \quad &\leftrightarrow \quad (\neg p \vee q) && \text{[opgave 2.10.1]} \\ &\leftrightarrow \quad (q \vee \neg p) && \text{[commutativiteit van } \vee\text{]} \\ &\leftrightarrow \quad (\neg\neg q \vee \neg p) && \text{[dubbele negatie]} \\ &\leftrightarrow \quad (\neg q \to \neg p) && \text{[opgave 2.10.1]} \end{aligned}$$

3. $p \leftrightarrow q$ en $(p \to q) \wedge (q \to p)$ en $(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$ en $\neg p$ $\underline{\text{xor}}$ q en $\neg(p$ $\underline{\text{xor}}$ $q)$.

   oplossing: Van Opgave 2.10.2 weten we dat $q \to p$ logisch equivalent is met $\neg p \to \neg q$. Dus, $(p \to q) \wedge (q \to p)$ is logisch equivalent met $(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$. Om de andere equivalenties te laten zien gebruiken we een waarheidstabel.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$p)$	$\neg p$	$\underline{\text{xor}}$	q	$\neg(p$	$\underline{\text{xor}}$	$q)$
1	1	1		1		**1**		1		0	**1**		**1**	0	
1	0	0		0		**0**		1		0	**0**		**0**	1	
0	1	0		1		**0**		0		1	**0**		**0**	1	
0	0	1		1		**1**		1		1	**1**		**1**	0	

4. $\underline{\text{if}}\ p\ \underline{\text{then}}\ q\ \underline{\text{else}}\ r$ en $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$ en $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

   oplossing: Van Opgave 2.4.5 weten we dat $\underline{\text{if}}\ p\ \underline{\text{then}}\ q\ \underline{\text{else}}\ r$ logisch equivalent is met $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$.

p	q	r	$\underline{\text{if}}\ p\ \underline{\text{then}}\ q\ \underline{\text{else}}\ r$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$($	$\neg p$	$\wedge$	$r)$
1	1	1	1		1		**1**		0	0	
1	1	0	1		1		**1**		0	0	
1	0	1	0		0		**0**		0	0	
1	0	0	0		0		**0**		0	0	
0	1	1	1		0		**1**		1	1	
0	1	0	0		0		**0**		1	0	
0	0	1	1		0		**1**		1	1	
0	0	0	0		0		**0**		1	0	

5. $p \to q$ en $\underline{\text{if}}\ p\ \underline{\text{then}}\ q\ \underline{\text{else}}\ \underline{\text{true}}$

   oplossing: Weer door bekende logische equivalenties te gebruiken:

$$
\begin{array}{lcll}
\underline{\text{if}}\ p\ \underline{\text{then}}\ q\ \underline{\text{else}}\ \underline{\text{true}} & \leftrightarrow & (p \to q) \wedge (\neg p \to \text{true}) & [\text{opgave } 2.10.4] \\
 & \leftrightarrow & (p \to q) \wedge \text{true} & [\text{wh-tabel } \to] \\
 & \leftrightarrow & p \to q & [\text{wh-tabel } \wedge]
\end{array}
$$